

Лекция 4

МКЭ — ИНЖЕНЕРНЫЙ ПОДХОД

В предыдущей лекции мы изложили метод конечных элементов как метод Галеркина в специальном конечномерном пространстве S_1^h . Небезынтересным для понимания сути метода и его алгоритмических возможностей будет также знакомство с подходом к нему инженеров. Широкое использование в инженерном подходе матричного формализма весьма полезно при выполнении конкретных вычислений.

1. Задача о растяжении стержня

Для иллюстрации этого подхода рассмотрим пример задачи о растяжении однородного стержня постоянного сечения под действием собственного веса. Будем считать, что стержень вертикально подвешен за один конец, а второй его конец свободен (см. рис. 1).

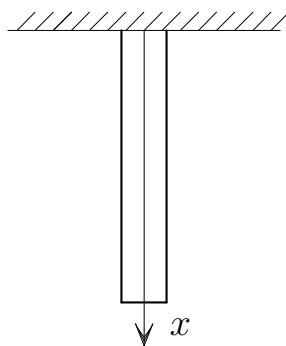


Рис. 1

Математически задача формулируется в виде смешанной задачи (1.1), (2.21) с

$$p(x) = E, \quad q(x) = 0, \quad f(x) = G, \quad \kappa = g = 0, \quad (1)$$

где E — модуль Юнга, G — вес единицы объема, а u — перемещение точки стержня с координатой x в результате растяжения. (Предполагается, что исходная длина стержня равна единице.) Именно

$$-Eu'' = G, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (2)$$

Эквивалентная задача о минимизации функционала (2.13) представляет собой формулировку принципа минимума полной потенциальной энергии

$$\Pi(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma(x)\varepsilon(x)dx - \int_0^1 G u dx, \quad (3)$$

где $\varepsilon(x) = du/dx$ — *относительное удлинение* (продольная деформация), $\sigma(x) = E\varepsilon(x) = Edu/dx$ — *натяжение* (*напряжение*, в нормальном к оси стержня сечении). Обозначим еще через

$$w(x) := \frac{1}{2}\sigma(x)\varepsilon(x) = \frac{1}{2}E (du/dx)^2 \quad (4)$$

плотность энергии деформации.

Будем решать эту задачу приближенно. Для этого разобьем стержень точками $x_i = ih$, $h = 1/N$, на N конечных элементов равной длины и будем считать, что на каждом конечном элементе $e^{(i)}$ приближенное решение представляется линейной функцией. Тем самым, для определения приближенного решения на элементе достаточно задать его значения в двух точках. Пусть эти точки — узлы элемента — суть его концы, т.е. x_{i-1} и x_i . Обозначим приближенное решение через $u^h(x)$, а его значения в узлах x_i — через u_i . Очевидно, что на конечном элементе $e^{(i)}$

$$u^h(x) = u_{i-1}\varphi_{i-1}^{(i)} + u_i\varphi_i^{(i)}, \quad x \in e^{(i)}, \quad (5)$$

где

$$\varphi_{i-1}^{(i)} = \frac{(x_i - x)}{h}, \quad \varphi_i^{(i)} = \frac{(x - x_{i-1})}{h} \quad (6)$$

— так называемые *функции формы* конечного элемента (см. рис. 2).

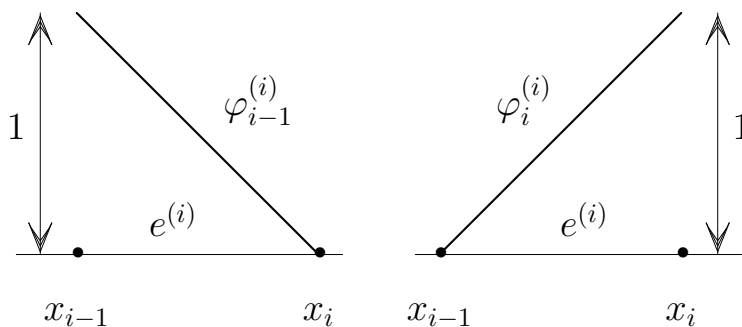


Рис. 2

Отметим, что на связь функции формы $\varphi_j^{(i)}$ с элементом $e^{(i)}$ указывает ее надстрочный индекс, помещенный в круглые скобки. Точно так же маркируется и сам элемент $e^{(i)}$. Договоримся и впредь связь каких-либо объектов с элементом $e^{(i)}$ обозначать надстрочным индексом i , помещенным в круглые скобки.

Пусть

$$\mathbf{u}^{(i)} = [u_{i-1} \ u_i]^T \quad (7)$$

— вектор значений приближенного решения в узлах элемента $e^{(i)}$ (*вектор узловых значений элемента $e^{(i)}$*), а

$$\Phi^{(i)} = \begin{bmatrix} \varphi_{i-1}^{(i)} & \varphi_i^{(i)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

— *матрица функций формы* этого элемента. Используя правило умножения матрицы на вектор, соотношение (5) перепишем в виде

$$u^h(x) = \Phi^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}, \quad x \in e^{(i)}. \quad (9)$$

Подставим приближенное решение $u^h(x)$ в функционал Π полной потенциальной энергии (3). Для этого представим сначала последний в виде суммы функционалов, каждый из которых определен на своем элементе

$$\Pi(u^h) = \sum_{i=1}^N \Pi^{(i)}(u^h), \quad (10)$$

где с учетом (4)

$$\Pi^{(i)}(u^h) = \int_{e^{(i)}} w^{(i)} dx - \int_{e^{(i)}} G u^h dx.$$

В силу (9), (8), (6) относительное удлинение $\varepsilon^{(i)}(x) = du^h(x)/dx$ представляется в виде $\varepsilon^{(i)}(x) = (d\Phi^{(i)}/dx)\mathbf{u}^{(i)}$, где

$$\frac{d}{dx}\Phi^{(i)} = \frac{1}{h}[-1 \quad 1], \quad (11)$$

а натяжение $\sigma^{(i)} = E\varepsilon^{(i)} = E(d\Phi^{(i)}/dx)\mathbf{u}^{(i)}$ и, следовательно, плотность энергии деформации на элементе $e^{(i)}$ есть

$$\begin{aligned} w^{(i)} &= \frac{1}{2}\sigma^{(i)}\varepsilon^{(i)} = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma^{(i)})^T \varepsilon^{(i)} = \frac{1}{2} \left(E \frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \mathbf{u}^{(i)} \right)^T \left(\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \mathbf{u}^{(i)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(i)T} \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right]^T E \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right] \mathbf{u}^{(i)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Pi_E^{(i)}(u^h) := \int_{e^{(i)}} w^{(i)} dx = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(i)T} K^{(i)} \mathbf{u}^{(i)},$$

где

$$\begin{aligned} K^{(i)} &= \int_{e^{(i)}} \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right]^T E \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right] dx = \\ &= \int_{e^{(i)}} \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{h} [-1 \quad 1] dx = \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

— матрица жесткости элемента.

Далее, так как $\Phi^{(i)}\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}^{(i)T}\Phi^{(i)T}$, то

$$\Pi_G^{(i)}(u^h) := \int_{e^{(i)}} Gu^h dx = \mathbf{u}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)},$$

где

$$\mathbf{F}^{(i)} = \int_{e^{(i)}} G\Phi^{(i)T} dx = \frac{G}{h} \int_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} x_i - x \\ x - x_{i-1} \end{bmatrix} dx = Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

— вектор нагрузки (узловых сил) элемента.

Итак, вклад в полную потенциальную энергию стержня со стороны элемента $e^{(i)}$

$$\Pi^{(i)}(u^h) := \Pi_E^{(i)}(u^h) - \Pi_G^{(i)}(u^h) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(i)T} K^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)} \quad (14)$$

на приближенном решении представляет собой квадратичную форму его узловых значений.

2. Сборка

Подставим (14) в (10). Для этого установим сначала связь между вектором узловых значений $\mathbf{u}^{(i)}$ элемента и полным (*глобальным*) вектором узловых значений

$$\mathbf{U}_{(f)} = [u_0, u_1, \dots, u_N]^T. \quad (15)$$

(Смысл подстрочного индекса (f) будет объяснен чуть позже.) Легко проверить, что

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{S}^{(i)} \mathbf{U}_{(f)}, \quad (16)$$

где $\mathbf{S}^{(i)}$ — прямоугольная $2 \times (N + 1)$ матрица вида

$$\mathbf{S}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \underbrace{0 & \dots & 0}_{i-1} & 0 & 1 & \underbrace{0 & \dots & 0}_{N-i} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

иногда называемая *матрицей кинематических связей*. С учетом (16) соотношение (14) принимает вид

$$\Pi^{(i)}(u^h) = \frac{1}{2} \mathbf{U}_{(f)}^T \mathbf{S}^{(i)T} K^{(i)} \mathbf{S}^{(i)} \mathbf{U}_{(f)} - \mathbf{U}_{(f)}^T \mathbf{S}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)}.$$

Подставляя это представление в (10), найдем, что

$$\Pi(u^h) = \frac{1}{2} \mathbf{U}_{(f)}^T K_{(f)} \mathbf{U}_{(f)} - \mathbf{U}_{(f)}^T \mathbf{F}_{(f)}, \quad (18)$$

где

$$K_{(f)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}^{(i)T} K^{(i)} \mathbf{S}^{(i)} \quad (19)$$

— глобальная матрица жесткости , а

$$\mathbf{F}_{(f)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)} \quad (20)$$

— глобальный вектор нагрузки.

Из (18) следует, что значение потенциальной энергии на приближенном решении есть квадратичная функция $(N + 1)$ переменных u_0, u_1, \dots, u_N , условием минимума которой является обращение в нуль ее первых производных. Выполняя требуемые дифференцирования и приравнивая полученные выражения нулю с учетом легко проверяемой симметрии $K_{(f)}$ получим систему уравнений

$$K_{(f)} \mathbf{U}_{(f)} = \mathbf{F}_{(f)}. \quad (21)$$

Поспешим оговориться, что это еще не та система, решение которой даст приближенное решение нашей задачи.*) Дело в том, что в проведенных нами рассуждениях нигде не делалось различий между конечными элементами (что очень важно с алгоритмической точки зрения) и поэтому мы, вообще говоря, не могли учесть условия закрепления на концах стержня. Сделаем это сейчас.

Согласно условиям задачи (2), искомое решение должно принимать нулевое значение при $x = x_0 = 0$. По введенной нами во второй лекции терминологии это главное граничное условие, и оно должно было быть учтено до того, как мы приступили к минимизации функционала. Поскольку мы этого не сделали, то неизвестная u_0 фигурировала как свободная и при получении системы (21) по ней проводилось дифференцирование функции (18) с приравниванием производной нулю. Из сказанного следует, что полученное таким способом уравнение не соответствует действительности и должно быть отброшено. Вместо него должно быть

*) Именно об этом должен напоминать введенный ранее, но не объясненный, подстрочный индекс (f) — "флажок". Всякий, кому доводилось находиться на летном поле аэродрома в ожидании посадки на самолет, мог видеть стоящие рядом на предполетном обслуживании самолеты с развевающимися на них красными ленточками. Эти ленточки вывешиваются у всевозможных люков, открытых для проведения работ, в местах присоединения шлангов и проводов. Их назначение — сигнализировать о *неготовности* самолета к взлету. Введенный нами "флажок" (f) также должен сигнализировать о *неготовности* системы к решению.

поставлено условие $u_0 = 0$. В силу тривиальности этого уравнения неизвестная u_0 вообще может быть исключена из преобразованной указанным способом системы (21), после чего ее порядок станет равным N . Обращаясь ко второму граничному условию задачи (2), констатируем, что оно является естественным и не вносит никаких возмущений в интеграл энергии (3). Следовательно, никаких изменений, связанных с этим граничным условием, вносить не нужно ни в матрицу $K_{(f)}$, ни в вектор $\mathbf{F}_{(f)}$.

Итак, пусть k_{ij} , $i, j = 0, 1, \dots, N$ — элементы матрицы $K_{(f)}$,

$$\mathbf{F}_{(f)} = [f_0 \dots f_N]^T = [f_0 \mathbf{F}^T]^T,$$

а

$$\mathbf{k}_0 = [k_{01} k_{02} \dots k_{0N}]^T.$$

Тогда систему (21) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} k_{00} & \mathbf{k}_0^T \\ \mathbf{k}_0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где K — матрица с элементами k_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$, а $\mathbf{U} = [u_1 \dots u_N]^T$. Из (22) находим, что

$$\begin{aligned} k_{00}u_0 + \mathbf{k}_0^T \mathbf{U} &= f_0, \\ \mathbf{k}_0 u_0 + K \mathbf{U} &= \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений должно быть отброшено, а остальные могут быть переписаны в виде $K \mathbf{U} = \mathbf{F} - k_0 u_0$. Но $u_0 = 0$ и система уравнений для отыскания приближенного решения окончательно принимает вид

$$K \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (23)$$

3. Пример реализации

Покажем, что система (23) с учетом (1) совпадает с системой (3.19). Для этого проведем вычисления, предусмотренные формулами (19), (20). Положим для простоты $N=3$. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{(f)} &= [u_0 u_1 u_2 u_3]^T, \\ \mathbf{u}^{(1)} &= [u_0 u_1]^T, \quad \mathbf{u}^{(2)} = [u_1 u_2]^T, \quad \mathbf{u}^{(3)} = [u_2 u_3]^T, \end{aligned}$$

а

$$S^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Произведя вычисления с использованием правила перемножения матриц, найдем, что

для элемента $e^{(1)}$:

$$\frac{E}{h} \begin{matrix} K^{(1)} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} S^{(1)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} K^{(1)S^{(1)}} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} S^{(1)T} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} K^{(1)S^{(1)}} \\ \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} S^{(1)T}K^{(1)S^{(1)}} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

для элемента $e^{(2)}$:

$$\frac{E}{h} \begin{matrix} K^{(2)} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} S^{(2)} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} K^{(2)S^{(2)}} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} S^{(2)T} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} K^{(2)S^{(2)}} \\ \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} S^{(2)T}K^{(2)S^{(2)}} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

для элемента $e^{(3)}$:

$$\frac{E}{h} \begin{matrix} K^{(3)} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} S^{(3)} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} K^{(3)S^{(3)}} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} S^{(3)T} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} K^{(3)S^{(3)}} \\ \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} S^{(3)T}K^{(3)S^{(3)}} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Далее

$$K_{(f)} = \sum_{i=1}^3 S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} = \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{matrix} S^{(1)T} & & S^{(2)T} & & S^{(3)T} & & F^{(f)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} F^{(1)} \\ Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \end{matrix} & + & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} F^{(2)} \\ Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \end{matrix} & + & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} F^{(3)} \\ Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \end{matrix} & = & Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}. \end{matrix}$$

Учет главного граничного условия при $x = 0$ и последующее исключение u_0 приводит к системе

$$\frac{E}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = Gh \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

которая совпадает с построенной на предыдущей лекции системой (3.19), если в последней положить $N=3$ и принять (1).

4. Упражнения

1. Выписать систему (23) в виде, аналогичном (24), для случая неравномерной сетки, т.е. для того случая, когда каждый элемент $e^{(i)}$ имеет свою длину, равную $h^{(i)}$.

2. Пусть $\Pi_q^{(i)}(u^h) = \int_{e^{(i)}} q(u^h)^2 dx = \mathbf{u}^{(i)T} M^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}$. Доказать, что матрица $M^{(i)}$, называемая *матрицей массы*, имеет вид

$$M^{(i)} = hq \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

3. Решению какой задачи отвечает система (21)?

4. В задаче (2.21), (1) откажемся от предположения, что $g = 0$. Пусть $g \neq 0$. Как при этом изменится процедура "снятия флажков" в п. 2? Как изменится система (24)?

5. Пусть изучаемый стержень не является однородным. Именно, пусть

$$E = \begin{cases} E_1, & 0 < x < 3/2, \\ E_2, & 3/2 < x < 1. \end{cases}$$

как будет выглядеть система уравнений, аналогичная системе (24)?